

# AKIŞKANLAR MEKANİĞİ-II (V-01)

## Örnek 7.1.

Bir hız alanı  $\vec{V} = (0,5 + 0,8x)\vec{i} + (1,5 - 0,8y)\vec{j}$  şeklinde verilmektedir. Burada  $x$  ve  $y$  koordinatları metre, hız ise m/s birimindedir.

- Akış kaç boyutludur?
- Akış daimi midir?
- Durma noktası, akış alanı içerisinde hızın sıfır olduğu nokta olarak tanımlanmaktadır. Bu tanıma göre verilen akış alanı içerisinde durma noktası var mıdır? Şayet var ise nerededir?
- $x=-2$  m ile  $2$  m ve  $y=0$  m ile  $5$  m arasında kalan bölgede, birim koordinat sistemi üzerindeki noktalarda bulunan hız vektörlerini çiziniz. Çizimler esnasında  $1$  m uzunluk  $2$  m/s'lik vektör büyüklüğüne denk düşecektir.

## Çözüm 7.1.

- Hız alanını temsil eden vektörün iki adet skaler bileşeni olduğundan hız iki-boyutludur. Bu bileşenler aşağıda gösterilmiştir.

$$\vec{V} = \underbrace{(0,5 + 0,8x)}_u \vec{i} + \underbrace{(1,5 - 0,8y)}_v \vec{j} + \underbrace{0}_w \vec{k}$$

- Hızın skaler bileşenleri sadece  $x$  ve  $y$  uzaysal koordinatlara bağlı olarak verilmiştir yani zamana bir bağılıkları yoktur. Bu yüzden akış daimidir.

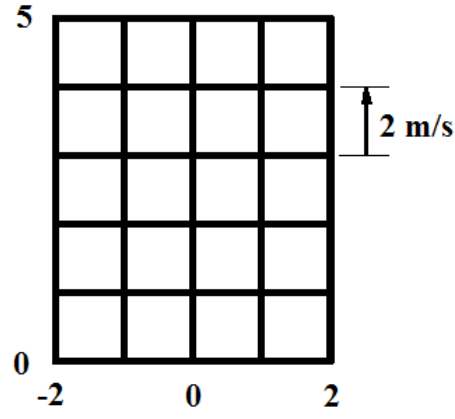
- Hızın sıfır olduğu nokta demek, hız bileşenlerinin sıfıra eşit olduğu nokta demektir. Yani,  $u=0$ ,  $v=0$  olmalıdır (son bileşen zaten bulunmadığından sıfıra eşittir,  $w=0$ ). Bu durumda, durma noktasının koordinatları

$$u = 0,5 + 0,8x = 0 \quad \rightarrow \quad x = -0,625 \text{ m}$$

$$v = 1,5 - 0,8y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 1,875 \text{ m}$$

olarak bulunur.

- Burada yapmamız gereken ilk iş, verilen aralıklar için koordinat sistemini çizmek olacaktır. Daha sonra da istenilen koordinat noktalarından başlanarak hızların bileşenleri hesaplanacak ve bu bileşenlerle bileşke hız vektörleri bulunup, ilgili koordinata çizilecektir.



$x = -2$  ve  $y = 0$  için

$$u = 0,5 + 0,8x = 0 \rightarrow u = -1,1 \text{ m/s}$$

$$v = 1,5 - 0,8y = 0 \rightarrow v = 1,5 \text{ m/s}$$

$x = -1$  ve  $y = 0$  için

$$u = 0,5 + 0,8x = 0 \rightarrow u = -0,3 \text{ m/s}$$

$$v = 1,5 - 0,8y = 0 \rightarrow v = 1,5 \text{ m/s}$$

$x = 0$  ve  $y = 0$  için

$$u = 0,5 + 0,8x = 0 \rightarrow u = 0,5 \text{ m/s}$$

$$v = 1,5 - 0,8y = 0 \rightarrow v = 1,5 \text{ m/s}$$

$x = 1$  ve  $y = 0$  için

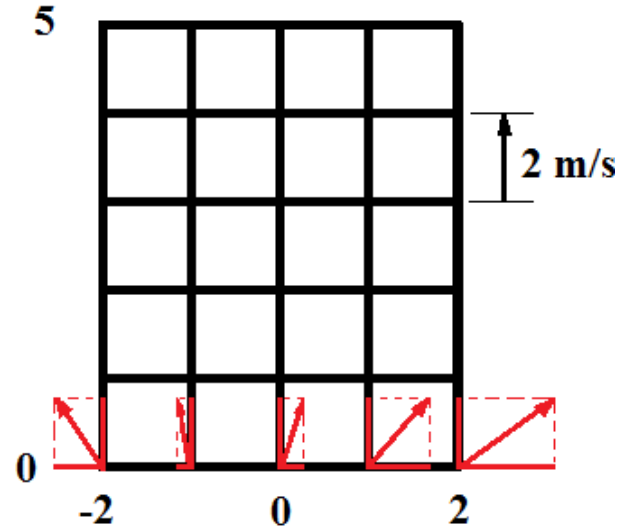
$$u = 0,5 + 0,8x = 0 \rightarrow u = 1,3 \text{ m/s}$$

$$v = 1,5 - 0,8y = 0 \rightarrow v = 1,5 \text{ m/s}$$

$x = 2$  ve  $y = 0$  için

$$u = 0,5 + 0,8x = 0 \rightarrow u = 2,1 \text{ m/s}$$

$$v = 1,5 - 0,8y = 0 \rightarrow v = 1,5 \text{ m/s}$$



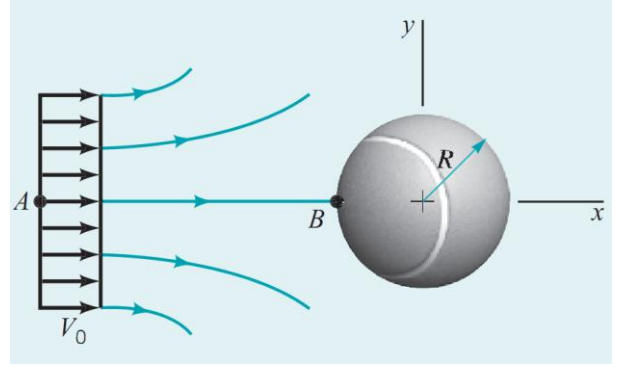
Benzer şekilde diğer koordinatlar için de skaler hız bileşenleri bulunup, uygun şekilde çizilir.

### Örnek 7.2.

Yandaki şekilde, bir tenis topu üzerinden sıkıştırılmaz ve sürtünmesiz bir akış söz konusudur. A noktasından B noktasına kadar olan yol boyunca hız değişimi

$$\vec{V} = V_0 \left( 1 + \frac{R^3}{x^3} \right) \vec{i}$$

olarak verilmiştir. Burada  $V_0$  toptan yeterince uzaktaki serbest akım hızı,  $R$  ise top yarıçapıdır.



a) Akışkan parçacığının A-B yolu boyunca akarken sahip olduğu ivmeyi veren ifadeyi türetiniz.

b)  $\frac{a_x}{V_0^2/R}$  ifadesinin  $x/R$  ile değişimini,  $x/R$ 'nin -3 ile -1 değerleri arasında 0,1 birimlik aralıklarla ölçülü bir şekilde çiziniz.

### Çözüm 7.2.

a) Hız değişimi sadece bir akışkan parçacığı için tanımlanmıştır. Hız alanını veren ifadenin içerisinde zamana bağlı herhangi bir ifade bulunmadığından akışın daimi olduğu açıktır. Ayrıca ifade sadece  $x$  konumunun bir fonksiyonudur. Bu sebeple ivmenin de sadece  $x$  doğrultusundaki bileşeni vardır. Bu doğrultudaki ivme denklemi:

$$a_x = \underbrace{\frac{du}{dt}}_{\substack{\text{Akış} \\ \text{daimi} \\ \text{olduğundan} \\ 0}} + u \cdot \frac{du}{dx} + \underbrace{v \cdot \frac{du}{dy}}_{\substack{\text{A-B yolu} \\ \text{üzerinde} \\ \text{hızın } v \\ \text{bileşeni} \\ \text{olmadığından} \\ 0}} + \underbrace{w \cdot \frac{du}{dz}}_{\substack{\text{A-B yolu} \\ \text{üzerinde} \\ \text{hızın } w \\ \text{bileşeni} \\ \text{olmadığından} \\ 0}}$$

$$a_x = u \cdot \frac{du}{dx} = V_0 \left( 1 + \frac{R^3}{x^3} \right) \cdot \frac{d \left[ V_0 \left( 1 + \frac{R^3}{x^3} \right) \right]}{dx} = V_0 \left( 1 + \frac{R^3}{x^3} \right) \cdot \left[ \left( -3 \cdot V_0 \cdot \frac{R^3}{x^4} \right) \right]$$

olur. Basit bir düzenleme ile

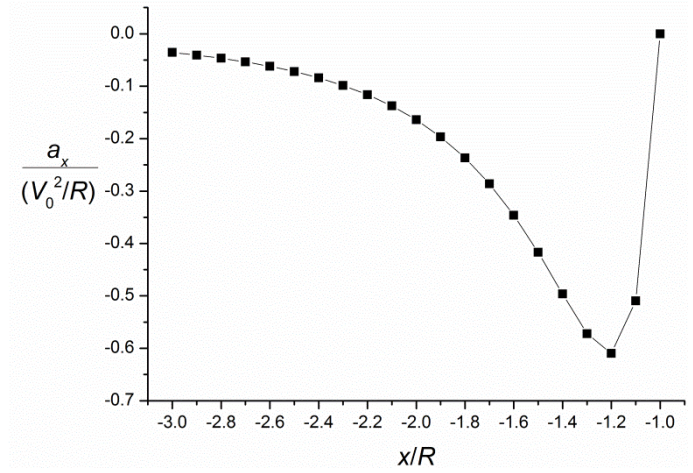
$$a_x = -3 \cdot \left( \frac{V_0^2}{R} \right) \cdot \left[ \left( \frac{R}{x} \right)^4 + \left( \frac{R}{x} \right)^7 \right]$$

olarak elde edilir.

$$\text{b) } a_x = -3 \cdot \left( \frac{V_0^2}{R} \right) \cdot \left[ \left( \frac{R}{x} \right)^4 + \left( \frac{R}{x} \right)^7 \right] \quad \text{ise} \quad \frac{a_x}{V_0^2/R} = -3 \cdot \left[ \left( \frac{R}{x} \right)^4 + \left( \frac{R}{x} \right)^7 \right] \quad \text{olur.}$$

Bu eşitliğe göre,

$$\begin{aligned}
\frac{x}{R} = -3 \text{ için } \frac{a_x}{V_0^2/R} &= -0,03567 \text{ olur.} \\
\frac{x}{R} = -2,9 \text{ için } \frac{a_x}{V_0^2/R} &= -0,04068 \text{ olur.} \\
\frac{x}{R} = -2,8 \text{ için } \frac{a_x}{V_0^2/R} &= -0,04658 \text{ olur.} \\
\frac{x}{R} = -2,7 \text{ için } \frac{a_x}{V_0^2/R} &= -0,05358 \text{ olur.} \\
\frac{x}{R} = -2,6 \text{ için } \frac{a_x}{V_0^2/R} &= -0,06191 \text{ olur.} \\
\frac{x}{R} = -2,5 \text{ için } \frac{a_x}{V_0^2/R} &= -0,07188 \text{ olur.} \\
\vdots & \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$



### Örnek 7.3.

Bir hız alanı,  $V_0$  ve  $l$  sabitler olmak üzere

$$\vec{V} = \left(-\frac{V_0}{l}x\right)\vec{i} + \left(\frac{V_0}{l}y\right)\vec{j}$$

şeklinde verilmektedir. Bu akışa ait akım çizgilerini,  $x \geq 0$  için tayin ediniz.

### Çözüm 7.3.

Hız alanını temsil eden vektörün iki adet skaler bileşeni olduğundan hız iki-boyutludur. Hız alanını veren ifadenin içerisinde zamana bağlı herhangi bir ifade bulunmadığından akışın daimi olduğu da açıktır.

$$\vec{V} = \underbrace{\left(-\frac{V_0}{l}x\right)}_u \vec{i} + \underbrace{\left(\frac{V_0}{l}y\right)}_v \vec{j}$$

ise

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{\left(\frac{V_0}{l}y\right)}{\left(-\frac{V_0}{l}x\right)} = -\frac{y}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x} \rightarrow \ln y = -\ln x + C$$

ve buradan da

$$x \cdot y = C$$

ifadesi elde edilir. Akım çizgilerini çizmek için  $C$  sabitine farklı değerler vereceğiz.

Mesela  $C=0$  olsun.

Bu durumda  $x=0$  için  $y=0$ ,  $x=1$  için  $y=0$ ,  $x=2$  için  $y=0$ ,  $x=3$  için  $y=0$ ,  $x=4$  için  $y=0$ ,  $x=5$  için  $y=0$  olacaktır.

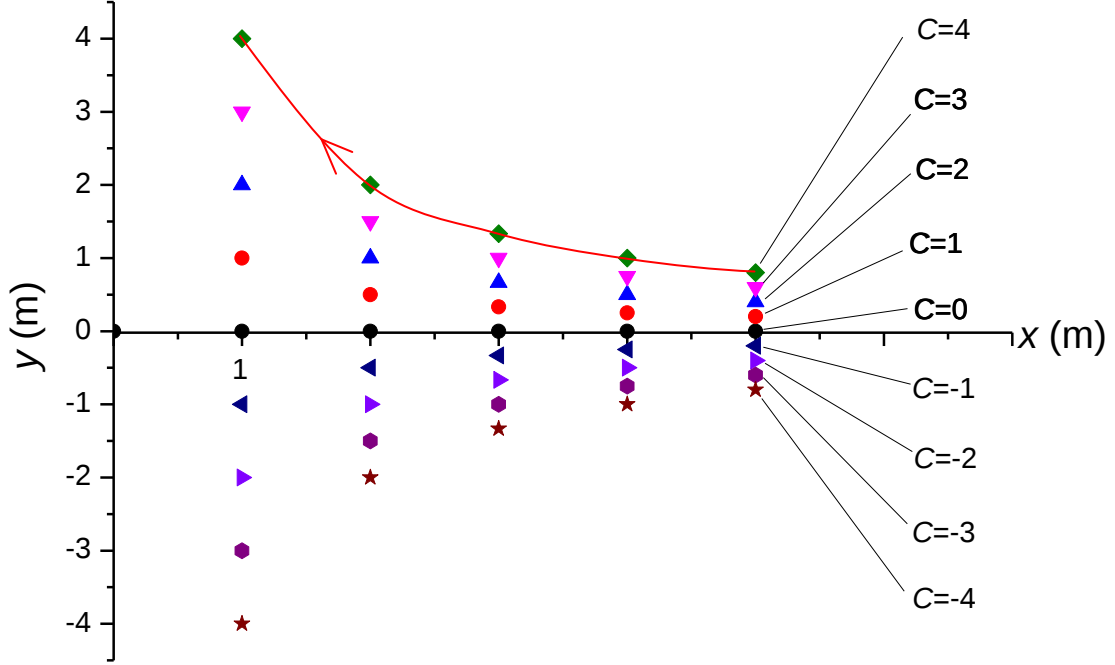
Mesela  $C=4$  olsun.

Bu durumda  $x=0$  olamaz,  $x=1$  için  $y=4$ ,  $x=2$  için  $y=2$ ,  $x=3$  için  $y=4/3$ ,  $x=4$  için  $y=1$  ve  $x=5$  için  $y=4/5$  olacaktır.

Mesela  $C = -4$  olsun.

Bu durumda  $x=0$  olamaz,  $x=1$  için  $y=-4$ ,  $x=2$  için  $y=-2$ ,  $x=3$  için  $y=-4/3$ ,  $x=4$  için  $y=-1$  ve  $x=5$  için  $y=-4/5$  olacaktır.

Sonuç olarak nihai çözüm aşağıdaki gibi olur. Aynı  $C$  değerine ait noktaları birleştirip akım çizgilerini ortaya çıkarabiliriz.



Akım yönü ise hız alanını tanımlayan ifadeden rahatlıkla elde edilebilir.  $x$ ,  $V_0$  ve  $l$ 'nin değerleri 0'dan büyük olduğundan,  $u$  bileşeni, ifadede yer alan “-” işaretinden dolayı hep negatiftir yani sola doğrudur. Bunun yanı sıra yine  $x$ ,  $V_0$  ve  $l$ 'nin değerleri 0'dan büyük olduğundan,  $v$  bileşeni, şayet  $y$  negatif ise negatif yani aşağı yönde,  $y$  pozitif ise pozitif yani yukarı yöndedir.

#### Örnek 7.4.

Daimi, iki-boyutlu bir hız alanı  $\vec{V} = (0,5 + 0,8x)\vec{i} + (1,5 - 0,8y)\vec{j}$  şeklinde verilmektedir. Burada  $x$  ve  $y$  koordinatları metre, hız ise m/s birimindedir. Aşağıdaki verilenleri hesaplayınız.

- Birim zamandaki ötelenme
- Birim zamandaki dönme
- Doğrusal şekil değiştirme hızı
- Kayma şekil değiştirmesi hızı
- Akışın sıkıştırılabilir olup olmadığı

#### Çözüm 7.4.

a) Birim zamandaki öteleme, denklemde verilen hızdır. Yani,

$$u = 0,5 + 0,8x$$

$$v = 1,5 - 0,8y$$

$$w = 0$$

b) Akış x-y düzleminde yani iki-boyutlu olduğundan, dönmenin sadece z bileşeni ( $\omega_z$ ) hesaplanır. Diğer bileşenler yoktur yani değerleri sıfırdır.

$$\vec{\omega}_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial(1,5 - 0,8y)}{\partial x} - \frac{\partial(0,5 + 0,8x)}{\partial y} \right) \vec{k} = \frac{1}{2} (0 - 0) \vec{k} = 0$$

Bu sonuç bize akışkan elemanlarının, bu hız alanında sergiledikleri hareketleri arasında dönmenin bulunmadığını göstermektedir.

c) Doğrusal şekil değiştirme hızları sırasıyla, x, y ve z doğrultularında aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(0,5 + 0,8x)}{\partial x} = 0,8 \frac{1}{s}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(1,5 - 0,8y)}{\partial y} = -0,8 \frac{1}{s}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$\varepsilon_{xx}$ 'in pozitif,  $\varepsilon_{yy}$ 'nin negatif olması, akışkan elemanlarının x doğrultusunda uzadıklarını, y doğrultusunda büzüldüklerini gösterir.  $\varepsilon_{zz}$ 'nin sıfır olması ise o doğrultuda bir değişimin olmadığı anlamını taşımaktadır.

d) Akış x-y düzleminde yani iki-boyutlu olduğundan, sadece bu düzlemdeki kayma şekil değiştirme hızı ( $\varepsilon_{xy}$ ) hesaplanır. Diğer bileşenler yoktur yani değerleri sıfırdır.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(1,5 - 0,8y)}{\partial x} + \frac{\partial(0,5 + 0,8x)}{\partial y} = 0$$

Bu sonuç bize akışkan elemanlarının, bu hız alanında sergiledikleri hareketleri arasında kayma şekil değiştirmesinin bulunmadığını göstermektedir.

e) Akışın sıkıştırılabilir olup olmadığı hacimsel şekil değiştirme hızından tespit edilebilir.

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,8 \frac{1}{s} - 0,8 \frac{1}{s} + 0 = 0$$

Bu sonuç bize akışın sıkıştırılmaz olduğunu gösterir.

### Örnek 7.5.

Bir hız alanı  $\vec{V} = (x^2)\vec{i} + (-2xy - 5)\vec{j}$  şeklinde verilmektedir. Burada x ve y koordinatları metre, hız ise m/s birimindedir. Aşağıdaki verilenleri hesaplayınız.

a) Akış kaç boyutludur?

b) Akış daimi midir?

c) Akış sıkıştırılabilir midir?

d) Akış dönümlü müdür?

### Çözüm 7.5.

a) Hız alanını temsil eden vektörün iki adet skaler bileşeni olduğundan hız iki-boyutludur. Bu bileşenler aşağıda gösterilmiştir.

$$\vec{V} = \underbrace{(x^2)}_u \vec{i} + \underbrace{(-2xy - 5)}_v \vec{j} + \underbrace{0}_w \vec{k}$$

b) Hızın skaler bileşenleri sadece  $x$  ve  $y$  uzaysal koordinatlara bağlı olarak verilmiştir yani zamana bir bağıllıkları yoktur. Bu yüzden akış daimidir.

c) Doğrusal şekil değiştirme hızları sırasıyla,  $x$ ,  $y$  ve  $z$  doğrultularında aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} = 2x \frac{1}{s}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(-2xy - 5)}{\partial y} = -2x \frac{1}{s}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Akışın sıkıştırılabilir olup olmadığı hacimsel şekil değiştirme hızından tespit edilebilir.

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 2x \frac{1}{s} - 2x \frac{1}{s} + 0 = 0$$

Bu sonuç bize akışın sıkıştırılamaz olduğunu gösterir.

d) Akış  $x$ - $y$  düzleminde yani iki-boyutlu olduğundan, dönmenin sadece  $z$  bileşeni vardır ( $\omega_z$ ). Diğer bileşenler yoktur yani değerleri sıfırdır. Aynı şekilde çevrintinin de sadece  $z$  bileşeni vardır ( $\zeta_z$ ). Akışın dönümlü olup olmadığı her ikisi ile de anlaşılabilir.

$$\vec{\zeta}_z = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = \left( \frac{\partial(-2xy - 5)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = (-2y - 0) \vec{k} = -2y \vec{k}$$

Sonucun sıfırdan farklı bir değere sahip olması bize akışkan elemanlarının bu hız alanı içerisinde dönme hareketi yaptıklarını ya da akışın dönümlü olduğunu söylemektedir.

### Örnek 8.1.

Aşağıda hız bileşenleri verilmiş daimi sıkıştırılamaz akışlar fiziksel olarak mümkün müdür?

a)  $u = 2x - 8y^2$ ,  $v = x^3 + y - \ln z$ ,  $w = \frac{x^2}{3} - 3z$

b)  $u = \left[ \frac{h^2(P_1 - P_2)}{2 \cdot \mu \cdot L} \right] \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]$ ,  $v = 0$ ,  $z = 0$

### Çözüm 8.1.

Daimi sıkıştırılamaz olarak verilen akışın fiziksel olarak mümkün olması için hız bileşenlerinin kütle korunumu denklemini sağlaması gerekmektedir.

a)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

olmalıdır.

$$\frac{\partial(2x - 8y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^3 + y - \ln z)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{x^2}{3} - 3z\right)}{\partial z} = 2 + 1 - 3 = 0$$

olduğundan mümkündür.

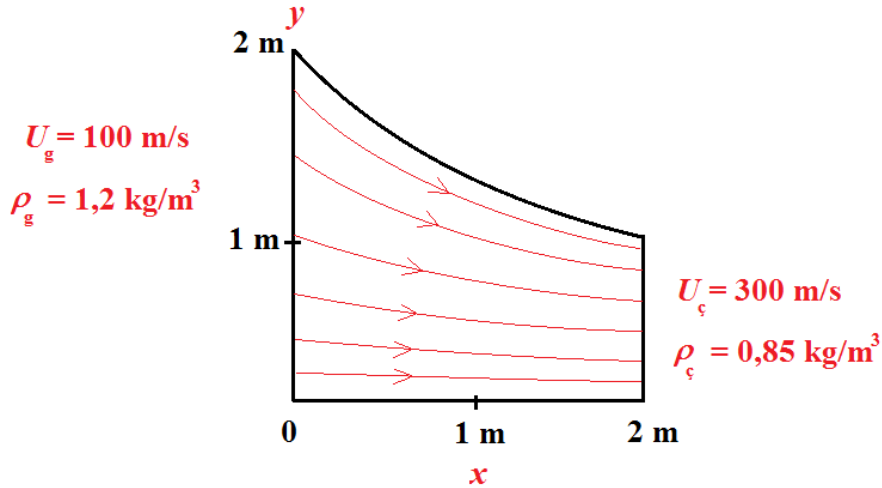
b)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \left[ \frac{h^2(P_1 - P_2)}{2 \cdot \mu \cdot L} \right] \left[ 1 - \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right]}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial y} + \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0$$

olduğundan mümkündür.

### Örnek 8.2.

Yüksek hızlı bir rüzgar tüneli için şekilde görüldüğü gibi bir daralma konisi tasarlanmaktadır. Giriş kesitinden çıkış kesitine kadar hızın  $u$  bileşenindeki ve yoğunluktaki ( $\rho$ ) değişimlerin doğrusal olarak gerçekleştiği varsayılıyor. Kanal iç yüzeyindeki sürtünmeleri ihmal ederek kanaldaki akışın  $v$  bileşenini veren ifadeyi türetiniz.  $x=1$  m ve  $y=1$  m noktasındaki bileşke hızı ve yoğunluğu hesaplayınız.



### Çözüm 8.2.

Akış  $x$ - $y$  düzleminde gerçekleşmektedir ve kanala giriş-çıkış hızları sabit olduğundan daimidir. Akış esnasında, konuma bağlı yoğunluk değişimi gerçekleştiğinden, akış sıkıştırılabilir. Bu kabuller süreklilik denklemini,

$$\underbrace{\frac{d\rho}{dt}}_{\substack{\text{Sıfır} \\ \text{çünkü} \\ \text{akış} \\ \text{daimi}}} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}}_{\substack{\text{Sıfır} \\ \text{çünkü} \\ \text{akış} \\ \text{iki-boyutlu}}} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

nihai formuna kavuşturur. Soru içerisinde hızın  $u$  bileşeninin ve havanın yoğunluğunun ( $\rho$ ),  $x$  eksenı boyunca doğrusal değışim sergiledikleri belirtilmişti. İlk olarak  $\rho$  için doğrusal değışim ifadesini yazalım.

$$\rho = mx + n$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow \rho = \rho_g = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \rightarrow n = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$x = 2 \text{ m} \rightarrow \rho = \rho_{\zeta} = 0,85 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \rightarrow m = -0,175 \frac{\text{kg}}{\text{m}^4}$$

olur ve nihai denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\rho = -0,175x + 1,2 \left( \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)$$

Şimdi de  $u$  için doğrusal değışim ifadesini yazalım.

$$u = mx + n$$

$$x = 0 \text{ m} \rightarrow u = u_g = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow n = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$x = 2 \text{ m} \rightarrow u = u_{\zeta} = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \rightarrow m = 100 \frac{1}{\text{s}}$$

olur ve nihai denklem aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u = 100x + 100 \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Elde edilen bu ifadeler süreklilik denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = -\frac{\partial[(-0,175x + 1,2) \cdot (100x + 100)]}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 35x - 102,5$$

Elde edilen bu ifade de  $y$ 'ye göre integre edilirse,

$$\int \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \int 35x - 102,5$$

$$\rho v = 35xy - 102,5y + f(x)$$

elde edilir. İşlem kısmi integral alma olduğundan, basit bir integrasyon sabiti yerine  $x$ 'e bağılı bir fonksiyonun ifadeye eklendiğine dikkat ediniz. Bu denklem kanal içerisindeki her noktada geçerli

olmalıdır. Mesela, kanalın taban yüzeyi düzgündür ve  $y=0$  için  $x$  hangi değeri alırsa alsın (mesela 0m veya 1,25 m gibi),  $v$  hızı, cıdardan dolayı 0 olacağından  $f(x)=0$  olarak elde edilir. Bu durumda  $v$  hızının genel hali aşağıdaki gibi olur.

$$v = \frac{35xy - 102,5y}{\rho} = \frac{35xy - 102,5y}{-0,175x + 1,2} \left( \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

Koordinat olarak  $(x,y)=(1\text{m}, 1\text{m})$  noktasında  $u$  ve  $v$  hızları, sırasıyla,

$$u = 100x + 100 = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = \frac{35xy - 102,5y}{-0,175x + 1,2} = -65,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{x=1,y=1} = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{(200)^2 + (-65,9)^2} = 210,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Koordinat olarak  $(x,y)=(1\text{m}, 1\text{m})$  noktasında yoğunluk da

$$\rho = -0,175x + 1,2 = -0,175(1) + 1,2 = 1,025 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

olarak elde edilir.

### Örnek 8.3.

Bir hız alanının bileşenleri  $u=0,5x+1,5$  ve  $v=-0,5y+0,35x$  şeklinde verilmektedir.

- Akım fonksiyonu için bir ifade geliştiriniz.
- Düşey eksenin sağ kısmında  $\psi=4, 2, 0$  ve  $-2 \text{ m}^2/\text{s}$  olduğu durumlardaki akım çizgilerini çizin.
- Akım çizgilerinin yönlerini belirtiniz.
- $\psi=0$  ile  $\psi=2 \text{ m}^2/\text{s}$  arasındaki, birim genişlik başına geçen hacimsel debiyi hesaplayınız.
- Hız alanının genişliği 50 cm ise geçen toplam hacimsel debiyi hesaplayınız.

### Çözüm 8.3.

a, b ve c) Verilen hız bileşenlerinden, akışın  $x$ - $y$  düzleminde gerçekleştiği, iki-boyutlu ve daimi olduğu anlaşılmaktadır. Hangi hız bileşeninden başlarsak başlayalım, sonuç değişmez. Bu yüzden akım fonksiyonunun ilk bileşeni ile başlayalım

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0,5x + 1,5$$

$$\int \partial \psi = \int (0,5x + 1,5) dy$$

$$\psi = 0,5xy + 1,5y + g(x) \quad (\text{Denklemler I})$$

Bulmuş olduğumuz bu ifadeyi ikinci ifadede yerine yazarsak,

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$v = -\frac{\partial}{\partial x} (0,5xy + 1,5y + g(x))$$

$$v = -0,5y - g'(x) \quad (\text{Denklem II})$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeyi, hız alanını temsil eden  $v$  değerine eşitlersek,

$$-0,5y - g'(x) = -0,5y + 0,35x$$

$$g(x) = -0,175x^2 + C \quad (\text{Denklem III})$$

Denklem III ile birlikte sabit ifadenin değerini ortaya çıkarmış olduk. Bunu akım fonksiyonunu ifade eden denklemdeki (Denklem II) yerine yazarsak, akım fonksiyonu aşağıdaki nihai forma kavuşur.

$$\psi = 0,5xy + 1,5y - 0,175x^2 + C$$

Elde edilen bu nihai denklemde her bir  $\psi - C$  sabitinin değerine karşılık gelen bir akım çizgisi bulunmaktadır. Basitlik için  $C=0$  alalım ve denklemi  $x$ 'in bir fonksiyonu olarak  $y$  için düzenleyelim.

$$y = \frac{\psi + 0,175x^2}{0,5x + 1,5}$$

Bu durumda,  $\psi=4 \text{ m}^2/\text{s}$  için

$x=0, 1, 2, 3, 4$  ve  $5\text{m}$  olduğu durumlarda  $y=2,66, 2,09, 1,88, 1,86, 1,94$  ve  $2,09 \text{ m}$  olur.

$\psi=2 \text{ m}^2/\text{s}$  için

$x=0, 1, 2, 3, 4$  ve  $5\text{m}$  olduğu durumlarda  $y=1,33, 1,09, 1,08, 1,19, 1,37$  ve  $1,59 \text{ m}$  olur.

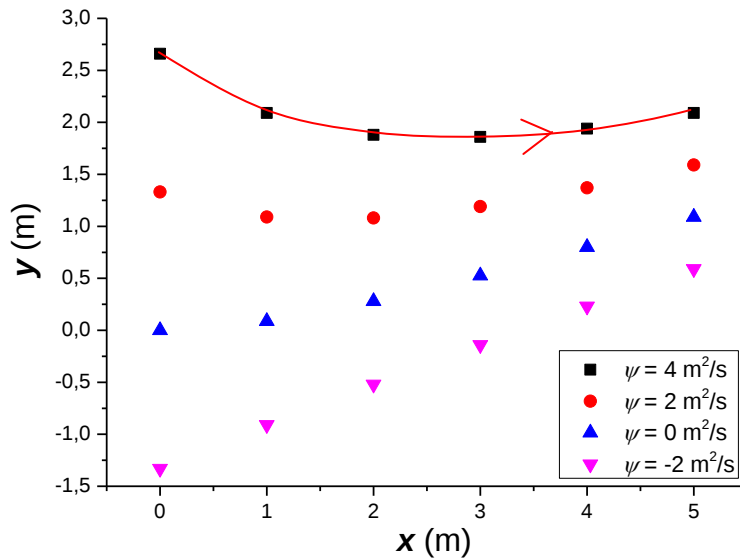
$\psi=0 \text{ m}^2/\text{s}$  için

$x=0, 1, 2, 3, 4$  ve  $5\text{m}$  olduğu durumlarda  $y=0, 0,088, 0,28, 0,525, 0,8$  ve  $1,09 \text{ m}$  olur.

$\psi=-2 \text{ m}^2/\text{s}$  için

$x=0, 1, 2, 3, 4$  ve  $5\text{m}$  olduğu durumlarda  $y=-1,33, -0,91, -0,52, -0,14, 0,23$  ve  $0,59 \text{ m}$  olur.

Aşağıdaki grafikte ilgili akım çizgileri, akım yönü de dahil olmak üzere (sol taraf kuralından faydalanarak) gösterilmiştir.



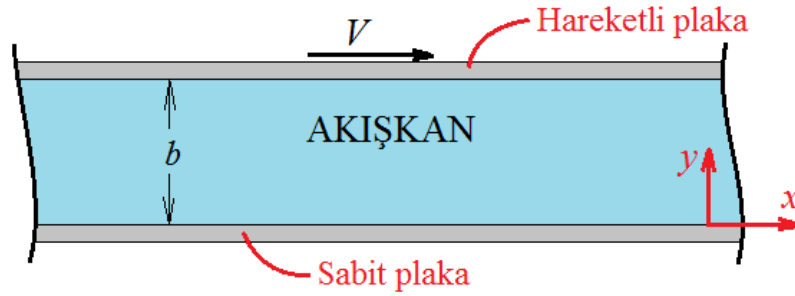
d)  $\psi = 2$  ile  $\psi = 0 \frac{m^2}{s}$  arasındaki, birim genişlik başına geçen hacimsel debi,

$$\dot{V} = \psi_2 - \psi_0 = 2 \frac{m^2}{s} - 0 \frac{m^2}{s} = 2 \frac{m^2}{s}$$

$$e) \frac{\dot{V}_T}{w} = \dot{V} \rightarrow \dot{V}_T = \dot{V} \cdot w = 2 \frac{m^2}{s} \cdot 0,5 m = 1 \frac{m^3}{s}$$

#### Örnek 8.4.

Yeterince uzunluğa ( $x$  yönü) ve derinliğe ( $z$  yönü) sahip iki paralel plaka arasındaki dar boşlukta Newton tipi akışkana ait daimi, sıkıştırılamaz, izotermal, laminar (viskoz) akışı dikkate alalım. Yukarıdan bakıldığında aşağı kısımda kalan plakanın sabit, yukarıda kalan plakanın ise sabit  $V$  hızı ile hareket ettiğini düşünelim. Plakalar arası mesafe sabit ve  $b$  olsun ve yerçekimi  $z$  doğrultusunda etkisin. Bu tip akışa Couette akışı denmektedir. Akışkanın hız ve basınç alanlarını veren ifadeleri türetiniz.



#### Çözüm 8.4.

Çözüme başlamadan önce gerekli kabullerimizi sıralayalım.

- 1- Plakalar  $x$  ve  $z$  yönlerinde yeterince uzunlardır.
- 2- Akış daimidir. Yani, herhangi bir büyüklüğün zamana göre değişim hızı ya da türevi  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  sıfırdır.
- 3- Bu paralel bir akıştır. Bu durumda  $y$  yönünde akış yoktur yani  $v=0$ .
- 4- Akış sıkıştırılamaz ve izotermal olduğundan yoğunluk ve viskozite sabittir.
- 5- Akışkan Newton tipidir.
- 6- Akış, hareketli üst plakadan kaynaklanan viskoz gerilmelerin etkisiyle oluşmaktadır yani  $x$  yönünde akışı ittiren bir basınç gradyeni yoktur  $\left(\frac{dP}{dx} = 0\right)$ .
- 7- Hız alanı  $x$ - $y$  düzleminde ve iki-boyutludur. Yani  $w=0$ 'dır ve herhangi bir hız bileşeninin  $z$ 'ye göre değişim hızı ya da türevi  $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$  sıfırdır.
- 8- Yerçekimi (gravitasyonel) kuvvet  $-z$  yönünde etmektedir, yani sayfanın içine doğrudur. Bu yüzden  $g_x=g_y=0$  ve  $g_z=-g$ 'dir.

Daimi sıkıştırılamaz akışlar için süreklilik denklemi kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabuller uygulanırsa,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{K-3} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{K-7} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade  $u$ 'nun  $x$ 'e göre değişim hızının ya da türevinin sıfır olduğunu yani,  $u$ 'nun  $x$ 'e göre değişim sergilemediğini göstermektedir. Bu ifadeyi dokuzuncu kabul (K-9) olarak kabullerimize ekleyelim ve işlemlerimize  $x$ -momentum denklemini kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabulleri uygulayarak devam edelim.

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{K-2} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{K-9} + \underbrace{v}_{K-3} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}_{K-7} \right) = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{K-6} + \rho \cdot \underbrace{g_x}_{K-8} + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{K-9} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{K-7} \right)$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

Burada bu denklemi integre ederek bir veya daha fazla integral sabitine bağlı bir ifade elde edelim.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_1$$

$$u = C_1 \cdot y + C_2$$

Şimdi, bu sabitleri bulmak için sınır şartlarından faydalanalım. Sınır şartları diyoruz çünkü iki adet sabit için en az iki tane sınır şartı gerekmektedir. İlk olarak, aşağıda kalan plaka (yukarıdan bakıldığında) üzerinde kaymama koşulu sınır şartını, ikinci olarak da, yukarıda kalan plaka üzerinde kaymama koşulu sınır şartını uygularsak, sabitler kolayca bulunabilir. Bunları matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$y = 0 \rightarrow u = 0 \text{ olur ve buradan } C_2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$y = b \rightarrow u = V \text{ olur ve buradan } C_1 = \frac{V}{b} \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu sabitleri ilgili denklemde yerlerine yazarak hız alanını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$u = \frac{V}{b} \cdot y$$

Bunu da kartezyen vektör formunda yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\vec{V} = \left( \frac{V}{b} \cdot y \right) \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Şimdi de işlemlerimize  $y$ -momentum denklemini kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabulleri uygulayarak devam edelim.

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{K-2} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{K-3} + \underbrace{v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}_{K-3} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}}_{K-3,7} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho \cdot \underbrace{g_y}_{K-8} + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{K-3} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{K-3} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{K-3} \right)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

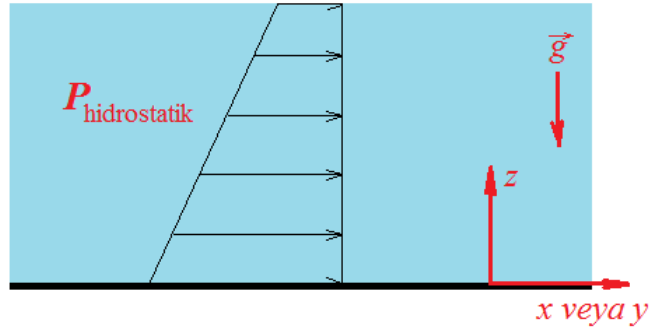
ifadesi elde edilir. Bu ifade  $P$ 'nin  $y$ 'ye göre değişim hızının ya da türevinin sıfır olduğunu yani,  $P$ 'nin  $y$ 'ye göre değişim sergilemediğini göstermektedir. Bu ifadeyi onuncu kabul (K-10) olarak kabullerimize ekleyelim ve işlemlerimize  $z$ -momentum denklemini kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabulleri uygulayarak devam edelim.

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial w}{\partial t}}_{K-2} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial x}}_{K-7} + v \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial y}}_{K-3,7} + w \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{K-7} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot g_z + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{K-7} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}_{K-7} + \underbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}}_{K-7} \right)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \cdot (-g) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho \cdot g$$

$$P = -\rho \cdot g \cdot z + C_3$$



Şimdi, bu sabiti bulmak için akla uygun bir sınır şartı oluşturalım. Mesela plakaların en altta bulunan noktalarında hidrostatik basınç maksimum değerinde olacaktır. Bunu matematikse olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$z = 0 \rightarrow P = P_{maks} \text{ olur ve buradan } C_3 = P_{maks} \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu sabitleri ilgili denklemde yerlerine yazıp düzenleme yaparsak, basınç alanını aşağıdaki gibi elde ederiz.

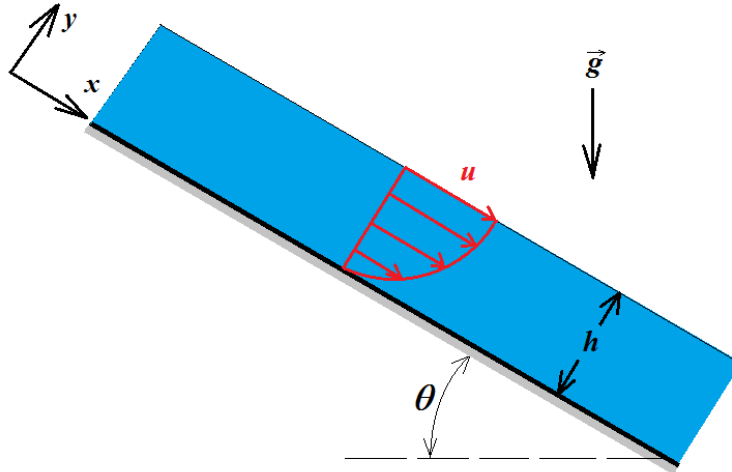
$$P = P_{maks} - \rho \cdot g \cdot z$$

### Örnek 8.5.

Daimi, tam gelişmiş, izotermal ( $T=20^\circ\text{C}$ ), laminer,  $h$  kalınlığına sahip bir su filmi, eğimli cam yüzeyden aşağıya doğru akmaktadır. Gerekli kabulleri yaparak

- Akışkanın hız alanını veren ifadeyi türetiniz.
- Akışkanın basınç alanını veren ifadeyi türetiniz.
- Akışkanın kayma gerilmesi alanını veren ifadeyi türetiniz.
- Birim genişlikten geçen akışkan debisini veren ifadeyi türetiniz.
- Akışkanın ortalama hızını veren ifadeyi türetiniz.
- Akışkan film yüksekliği ile birim genişlikten geçen hacimsel debiyi ilişkilendiriniz.

g) Yatayla  $\theta=25^\circ$  açı yapan,  $b=60$  cm genişliğindeki cam yüzey üzerinden akmakta olan  $h=1,15$  mm yüksekliğindeki su filminin hacimsel debisini ve ortalama hızını hesaplayınız.



#### Çözüm 8.5.

Çözüme başlamadan önce gerekli kabullerimizi sıralayalım.

- 1- Akış daimidir. Yani, herhangi bir büyüklüğün zamana göre değişim hızı ya da türevi  $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$  sıfırdır.
- 2- Akışkan Newton tipidir.
- 3- Akış sıkıştırılamaz ve izotermal olduğundan yoğunluk ve viskozite sabittir.
- 4- Hız alanı x-y düzleminde ve iki-boyutludur. Yani  $w=0$ 'dır ve herhangi bir hız bileşeninin z'ye göre değişim hızı ya da türevi  $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$  sıfırdır.
- 5- Yerçekimi (gravitasyonel) kuvveti z doğrultusunda etkimemektedir, yani,  $g_z=0$ 'dır.
- 6- Akış tam gelişmiş olduğundan ve yerçekimi etkisiyle oluşturulduğundan x doğrultusunda herhangi bir özelliğin değişiminden bahsedilemez, yani,  $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$  sıfıra eşittir.

a) Daimi sıkıştırılamaz akışlar için süreklilik denklemi kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabuller uygulanırsa,

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{K-6} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial w}{\partial z}}_{K-4} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade v'nin y'ye göre değişim hızının ya da türevinin sıfır olduğunu yani, v'nin y'ye göre değişim sergilemediğini göstermektedir. Dördüncü ve altıncı kabuller bize v'nin, sırasıyla, z'ye ve x'e göre değişim sergilemediğini zaten göstermişti. Bu durumda v hiçbir yöne göre değişmeyen bir sabittir. Kaymama koşulundan dolayı da cam yüzeyde değeri sıfır olduğundan tüm akış alanı içerisindeki değeri sıfırdır, yani,  $v=0$ . Bu ifadeyi yedinci kabul (K-7) olarak kabullerimize

ekleyelim ve işlemlerimize x-momentum denklemini kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabulleri uygulayarak devam edelim.

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{K-1} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{K-6} + \underbrace{v}_{K-7} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial u}{\partial z}}_{K-4} \right) = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial x}}_{K-6} + \rho \cdot g_x + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{K-6} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{K-4} \right)$$

$$\rho \cdot (g \cdot \sin \theta) + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot y + C_1$$

$$u = - \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + C_1 \cdot y + C_2$$

Şimdi, bu sabitleri bulmak için sınır şartlarından faydalanalım. İlk olarak, simetri sınır şartını, ikinci olarak da, cam yüzey üzerinde kaymama koşulu sınır şartını uygularsak sabitler kolayca bulunabilir. Bunları matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$y = h \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ olur ve buradan } C_1 = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot h \text{ bulunur.}$$

$$y = 0 \rightarrow u = 0 \text{ olur ve buradan } C_2 = 0 \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu sabitleri ilgili denklemde yerlerine yazarak hız alanını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$u = - \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot h \cdot y$$

Bunu da kartezyen vektör formunda yazacak olursak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\vec{v} = \left( - \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot h \cdot y \right) \vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$$

Şimdi de işlemlerimize x-momentum denklemini kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabulleri uygulayarak devam edelim.

b) Şimdi de işlemlerimize y-momentum denklemini kartezyen koordinatlarda aşağıdaki gibi yazıp gerekli kabulleri uygulayarak devam edelim.

$$\rho \left( \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{K-1} + u \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial x}}_{K-6} + \underbrace{v \cdot \frac{\partial v}{\partial y}}_{K-7} + \underbrace{w \cdot \frac{\partial v}{\partial z}}_{K-4,7} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \rho \cdot g_y + \mu \left( \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{K-7} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{K-7} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}}_{K-7} \right)$$

$$- \frac{\partial P}{\partial y} + \rho \cdot (-g \cdot \cos \theta) = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\rho \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$P = -\rho \cdot g \cdot \cos \theta \cdot y + C_3$$

Şimdi, bu sabiti bulmak için akla uygun bir sınır şartı oluşturalım. Mesela cam yüzey üzerinde hidrostatik basınç maksimum değerinde olacaktır. Bunu matematikse olarak aşağıdaki gibi ifade ederiz.

$$y = 0 \rightarrow P = P_{maks} \text{ olur ve buradan } C_3 = P_{maks} \text{ bulunur.}$$

Bulunan bu sabitleri ilgili denklemde yerlerine yazıp düzenleme yaparsak, basınç alanını aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$P = P_{maks} - \rho \cdot g \cdot \cos \theta \cdot y$$

Burada z-mometumu yazmaya gerek kalmamıştır çünkü tüm istenenler bulunmuştur.

c) Newton tipi bir akışkan için kayma gerilmesi dağılımı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Burada  $v=0$  olduğundan ifade aşağıdaki forma kavuşur.

$$\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$$

Bu denklem, ilk dönem görmüş olduğunuz bir boyutlu akış için kayma gerilmesidir. Hız alanının  $y$ 'ye göre türevi alınırsa akışın kayma gerilmesi dağılımı aşağıdaki formuna kavuşur.

$$\tau_{yx} = \mu \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot h \cdot y \right] = -\rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot y + \rho \cdot g \cdot \sin \theta \cdot h$$

$$\tau_{yx} = \rho \cdot g \cdot \sin \theta (h - y)$$

d) Hacimsel debi,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \int_A u \cdot dA = \int_0^h u \cdot b \cdot dy = \int_0^h \left[ -\frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot h \cdot y \right] \cdot b \cdot dy \\ &= \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \int_0^h \left[ h \cdot y - \frac{y^2}{2} \right] \cdot dy = \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \left[ h \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right] \Big|_0^h \\ &= \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \left[ h \cdot \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right] = \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{h^3}{3} \end{aligned}$$

e) Ortalama hız,

$$u_{ort} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\left( \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{h^3}{3} \right)}{b \cdot h} = \frac{\rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{h^2}{3}$$

f) Akışkan film yüksekliği ile birim genişlikten geçen hacimsel debi arasındaki ilişki,

$$\dot{V} = \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{h^3}{3} \rightarrow h = \left( \frac{\dot{V}}{b} \cdot \frac{3 \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \right)^{1/3}$$

g) Yatayla  $\theta=25^\circ$  açı yapan,  $b=60$  cm genişliğindeki cam yüzey üzerinden akmakta olan  $h=1,15$  mm yüksekliğindeki su filminin hacimsel debisini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

Sıcaklığı  $20^\circ\text{C}$  olan suyun viskozitesi ve yoğunluğu tablolardan elde edilebilir.

$$\mu = 1,002 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$$

$$\rho = 998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Bu veriler de hesaba katılarak su filminin hacimsel debisi,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{b \cdot \rho \cdot g \cdot \sin \theta}{\mu} \cdot \frac{h^3}{3} \\ &= \frac{(0,60\text{m}) \cdot \left(998 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (\sin 25)}{\left(1,002 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)} \cdot \frac{(1,15 \cdot 10^{-3}\text{m})^3}{3} = 1,255 \frac{\text{L}}{\text{s}} \end{aligned}$$

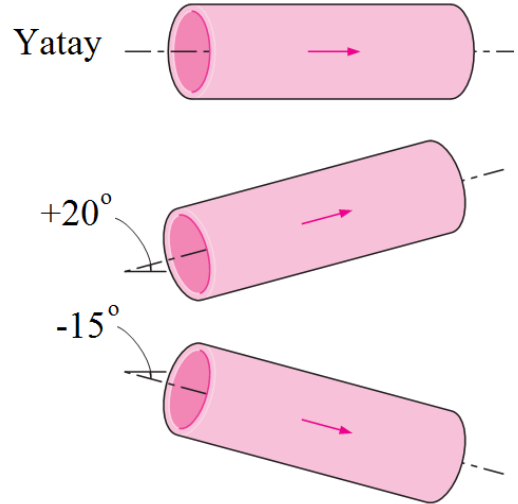
olarak bulunur. Ortalama hız ise,

$$u_{ort} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{1,255 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{(0,60 \text{ m}) \cdot (1,15 \cdot 10^{-3} \text{ m})} = 1,82 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### Örnek 9.1.

Sıcaklığı  $20^\circ\text{C}$ 'de sabit olan yağ ( $\rho=886 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=0,805 \text{ kg/m.s}$ ) 5 cm çapa sahip bir borunun 40 m'lik uzunluğundan tam gelişmiş şekilde ve daimi olarak akmaktadır. Bu 40 m'lik uzunluğun girişindeki basınç 720 kPa, çıkışındaki basınç ise 101 kPa olarak ölçülmüştür. Akış laminerdir. Hacimsel debileri, ortalama hızları, Reynolds sayılarını ve Darcy sürtünme faktörlerini

- Borunun yatay olduğu
  - Borunun yatayla saatin tersi yönünde  $20^\circ$  yaptığı
  - Borunun yatayla saat yönünde  $15^\circ$  yaptığı
- durumlar için hesaplayınız.



### Çözüm 9.1.

Akışkan sıvı olduğundan ve akışkana yeterince yüksek basınç etkimeydiğinden akışkan sıkıştırılmaz kabul edilebilir. Boru boyunca meydana gelen basınç düşüşü (kayıbı) ve borunun en-kesit alanı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Delta P_K = P_1 - P_2 = 720 \text{ kPa} - 101 \text{ kPa} = 619 \text{ kPa}$$

$$A = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 0,025 \text{ m} = 1,963 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

- Yatay boru ( $\theta=0^\circ$ )

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P_K - \rho \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta) \cdot \pi \cdot D^4}{128 \cdot \mu \cdot L}$$

$$\dot{V} = \frac{\Delta P_K \cdot \pi \cdot D^4}{128 \cdot \mu \cdot L} = \frac{(619000 \text{ Pa}) \cdot \pi \cdot (0,05 \text{ m})^4}{128 \cdot \left(0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right) \cdot (40 \text{ m})} = 2,949 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$u_{ort} = \frac{(\Delta P_K - \rho \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta) \cdot D^2}{32 \cdot \mu \cdot L}$$

$$u_{ort} = \frac{\Delta P_K \cdot D^2}{32 \cdot \mu \cdot L} = \frac{(619000 \text{ Pa}) \cdot (0,05 \text{ m})^2}{32 \cdot \left(0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right) \cdot (40 \text{ m})} = 1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{\rho \cdot u_{ort} \cdot D}{\mu} = \frac{\left(886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,05 \text{ m})}{\left(0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)} = 82,55$$

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{82,55} = 0,775$$

b) Eğimli boru ( $\theta=20^\circ$ )

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P_K - \rho \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta) \cdot \pi \cdot D^4}{128 \cdot \mu \cdot L}$$

$$= \frac{\left[ (619000 \text{ Pa}) - \left(886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (40 \text{ m}) \cdot (\sin 20^\circ) \right] \cdot \pi \cdot (0,05 \text{ m})^4}{128 \cdot \left(0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right) \cdot (40 \text{ m})}$$

$$= 2,382 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

$$u_{ort} = \frac{(\Delta P_K - \rho \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta) \cdot D^2}{32 \cdot \mu \cdot L}$$

$$= \frac{\left[ (619000 \text{ Pa}) - \left(886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (40 \text{ m}) \cdot (\sin 20^\circ) \right] \cdot (0,05 \text{ m})^2}{32 \cdot \left(0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right) \cdot (40 \text{ m})} = 1,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$Re = \frac{\rho \cdot u_{ort} \cdot D}{\mu} = \frac{\left(886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,05 \text{ m})}{\left(0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)} = 66,59$$

$$f = \frac{64}{Re} = \frac{64}{66,59} = 0,961$$

c) Eğimli boru ( $\theta=-15^\circ$ )

$$\dot{V} = \frac{(\Delta P_K - \rho \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta) \cdot \pi \cdot D^4}{128 \cdot \mu \cdot L}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left[ (619000 \text{ Pa}) - \left( 886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (40 \text{ m}) \cdot (\sin -15^\circ) \right] \cdot \pi \cdot (0,05 \text{ m})^4}{128 \cdot \left( 0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right) \cdot (40 \text{ m})} \\
&= 3,378 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\
u_{ort} &= \frac{(\Delta P_K - \rho \cdot g \cdot L \cdot \sin \theta) \cdot D^2}{32 \cdot \mu \cdot L} \\
&= \frac{\left[ (619000 \text{ Pa}) - \left( 886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot (40 \text{ m}) \cdot (\sin -15^\circ) \right] \cdot (0,05 \text{ m})^2}{32 \cdot \left( 0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right) \cdot (40 \text{ m})} = 1,72 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\
Re &= \frac{\rho \cdot u_{ort} \cdot D}{\mu} = \frac{\left( 886 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 1,72 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot (0,05 \text{ m})}{\left( 0,805 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right)} = 94,65 \\
f &= \frac{64}{Re} = \frac{64}{94,65} = 0,676
\end{aligned}$$

### Örnek 9.2.

Sıcaklığı 15,6 °C olan su ( $\rho=999 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu=0,00112 \text{ kg/m.s}$ ), 5,2 cm çaplı paslanmaz çelikten yapılmış yatay boruda 0,00566 m<sup>3</sup>/s'lik bir debi ile daimi olarak akmaktadır. Borunun tam gelişmiş akış bulunan 50 m'lik kısmı boyunca akıştaki basınç düşüşünü, yük kaybını ve gerekli pompalama gücünü hesaplayınız.

### Çözüm 9.2.

Debi verildiği için, onu boru içi en-kesit alanına bölerek ortalama hıza erişebiliriz.

$$V_{ort} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{0,00566 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot (0,052 \text{ m})^2 / 4} = 2,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ortalama hızı da elde ettiğimiz için Reynolds sayısını hesaplayıp boru içindeki akış rejimini belirleyebiliriz.

$$Re = \frac{\rho \cdot V_{ort} \cdot D}{\mu} = \frac{\left( 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 2,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot (0,052 \text{ m})}{\left( 0,00112 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right)} = 123840$$

Elde edilen bu değer 4000'den büyük olduğu için akış türbülanslıdır. Türbülanslı akışta Darcy sürtünme faktörünü Haaland denklemi ile kolayca belirleyebiliriz ya da Moody diyagramından tespit edebiliriz. Paslanmaz çelik için pürüzlülük değeri  $\varepsilon=0,002 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ 'dir. Bu durumda  $f$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{1,11} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{123840} + \left( \frac{(0,002 \cdot 10^{-3} \text{ m}) / (0,052 \text{ m})}{3,7} \right)^{1,11} \right]$$

$$f = 0,0172$$

olarak bulunur. Bu durumda basınç düşüşü ve yük kaybı, sırasıyla, aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\Delta P_K = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\rho \cdot V_{ort}^2}{2} = 0,0172 \cdot \frac{(50 \text{ m})}{(0,052 \text{ m})} \cdot \frac{\left( 999 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 2,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2} = 58892 \text{ Pa}$$

$$h_K = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V_{ort}^2}{2 \cdot g} = 0,0172 \cdot \frac{(50 \text{ m})}{(0,052 \text{ m})} \cdot \frac{\left( 2,67 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot \left( 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)} = 6,01 \text{ m}$$

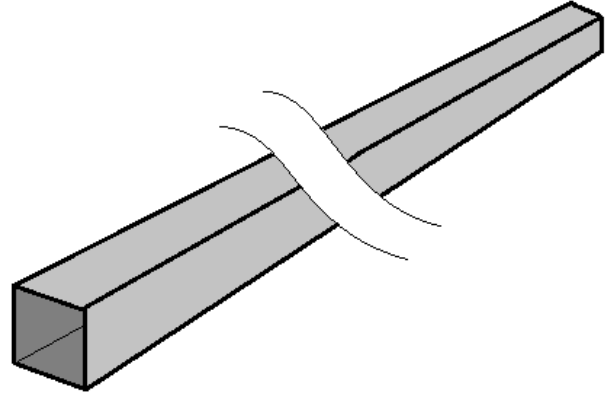
Bu durumda gerekli güç

$$\dot{W}_{pompa} = \Delta P_K \cdot \dot{V} = (58892 \text{ Pa}) \cdot \left( 0,00566 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) = 333,3 \text{ W}$$

olarak elde edilir. Bu güç, borudaki sürtünmeden kaynaklanan kayıpları yenmek için verilmesi gereken minimum gücü temsil etmektedir.

### Örnek 9.3.

En kesit alanı 24 cm × 24 cm olan kare kesite sahip bir havalandırma kanalının 30 m'lik kısmında tam gelişmiş akış bulunmaktadır. Yaklaşık 0,710 m<sup>3</sup>/s'lik bir debi ile akmakta olan havanın yoğunluğunun ve kinematik viskozitesinin değerleri, sırasıyla,  $\rho=1,226 \text{ kg/m}^3$  ve  $\nu=1,485 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  ve kanal alüminyumdan imal edildiğine göre yük kaybını ve gerekli fan gücünü hesaplayınız.



### Çözüm 9.3.

Debi verildiği için, onu boru içi en-kesit alanına bölerek ortalama hıza erişebiliriz.

$$V_{ort} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{0,710 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{(0,24 \text{ m}) \cdot (0,24 \text{ m})} = 12,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ortalama hızı elde ettik fakat Reynolds sayısını hesaplayıp kanal içindeki akış rejimini belirleyebilmemiz için önce hidrolik çapı belirlememiz gerekmektedir, çünkü kanalımız dairesel kesitli değildir.

$$D_h = \frac{4 \cdot A}{\zeta} = \frac{4 \cdot (0,24 \text{ m}) \cdot (0,24 \text{ m})}{4 \cdot (0,24 \text{ m})} = 0,24 \text{ m}$$

ise

$$Re = \frac{\rho \cdot V_{ort} \cdot D_h}{\mu} = \frac{V_{ort} \cdot D_h}{\nu} = \frac{\left(12,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,24 \text{ m})}{\left(1,485 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)} = 199273$$

Elde edilen bu değer 4000'den büyük olduğu için akış türbülanslıdır. Türbülanslı akışta Darcy sürtünme faktörünü Haaland denklemi ile kolayca belirleyebiliriz ya da Moody diyagramından tespit edebiliriz. Alüminyum için pürüzlülük değeri  $\varepsilon=0,0015 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ 'dir. Bu durumda  $f$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right)^{1,11} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{199273} + \left( \frac{(0,0015 \cdot 10^{-3} \text{ m})/(0,24 \text{ m})}{3,7} \right)^{1,11} \right]$$

$$f = 0,0155$$

olarak bulunur. Bu durumda yük kaybı ve gerekli fan gücü aşağıdaki gibi hesaplanır.

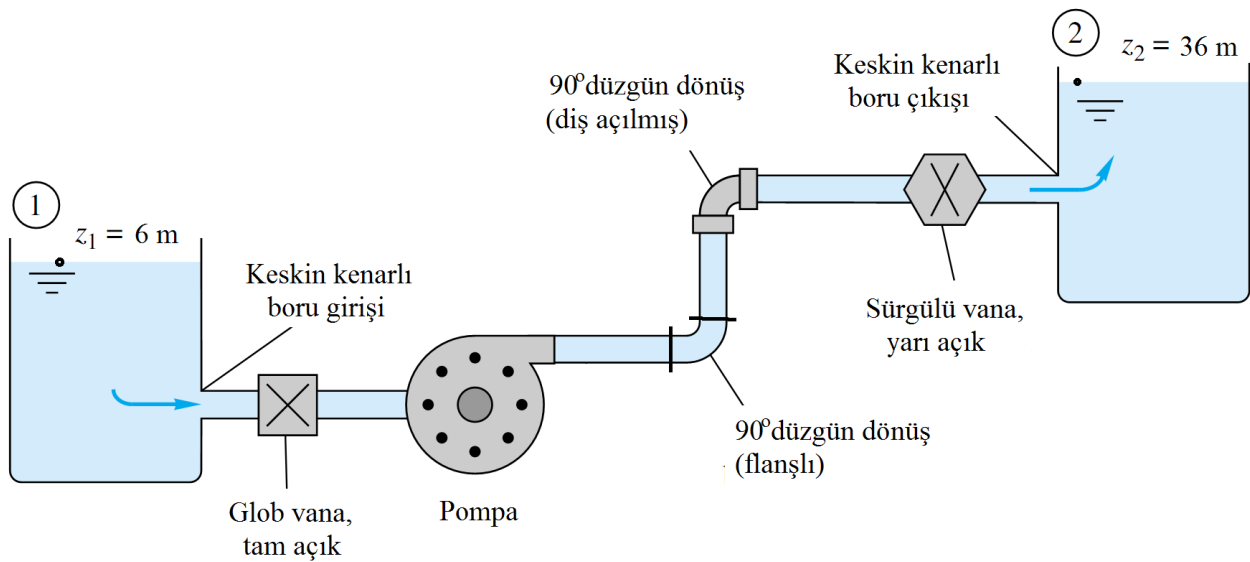
$$h_K = f \cdot \frac{L}{D_h} \cdot \frac{V_{ort}^2}{2 \cdot g} = 0,0155 \cdot \frac{(30 \text{ m})}{(0,24 \text{ m})} \cdot \frac{\left(12,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)} = 15,01 \text{ m}$$

$$\Delta P_K = \left(1,226 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot (15,01 \text{ m}) = 180,5 \text{ Pa}$$

$$\dot{W}_{fan} = \Delta P_K \cdot \dot{V} = (180,5 \text{ Pa}) \cdot \left(0,710 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) = 128,2 \text{ W}$$

olarak elde edilir. Bu güç, kanaldaki sürtünmeden kaynaklanan kayıpları yenmek için verilmesi gereken minimum gücü temsil etmektedir.

#### Örnek 9.4.



Yoğunluğunun ve viskozitesinin değerleri, sırasıyla,  $\rho=999,1 \text{ kg/m}^3$  ve  $\mu=1,138 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m/s}$  olan su  $6,4 \text{ L/s}$ 'lik bir debi ile şekilde de gösterildiği gibi, bir depodan diğerine  $120 \text{ m}$

uzunluğundaki ve 5 cm çapındaki bir boru içinden geçerek pompalanmaktadır. Sistemdeki yerel kayıplar da şekil üzerinde gösterilmiştir. Bu durumda, boru malzemesinin bağıl pürüzlülüğünü  $\varepsilon/D=0,001$  alarak pompadan suya aktarılan mekanik gücü hesaplayınız.

#### Çözüm 9.4.

İki deponun serbest su yüzeylerinde yer alan 1 ve 2 noktaları arasında yer alan daimi akışa ait enerji denklemi yükler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g} + \alpha_1 \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + z_1 + h_{pompa,f} = \frac{P_2}{\rho \cdot g} + \alpha_2 \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g} + z_2 + h_{türbin,f} + h_{K,Toplam}$$

şeklinde ifade edilir. Soruyu dikkatli bir şekilde irdelediğimizde her iki noktanın da atmosfere açık olduğunu görürüz, bu da  $P_1 = P_2 = 0$  (etkin) olduğunu bizlere açıklar. Bu noktalardaki (geniş yüzey) akışkan parçacığının hızı da neredeyse 0'dır yani  $V_1 = V_2 \approx 0$  denilebilir. Sistem içerisinde türbin de bulunmadığından  $h_{türbin,f} = 0$  diyebiliriz. Bu durumda nihai denklem aşağıdaki gibi olur.

$$h_{pompa,f} = (z_2 - z_1) + h_{K,Toplam}$$

Boru çapı da değişmediği için denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$h_{pompa,f} = (z_2 - z_1) + \left( f \cdot \frac{L}{D} + \sum K_K \right) \cdot \frac{V_{ort}^2}{2 \cdot g}$$

Bu ifadede  $V_{ort}$ ,  $f$  ve bağlantı elemanlarına ait kayıp katsayıları ( $K_K$ ) bilinmemektedir. Şimdi sırasıyla bunları bulalım. Debi verildiği için, onu boru içi en-kesit alanına bölerek ortalama hıza erişebiliriz.

$$V_{ort} = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{V}}{\pi \cdot D^2 / 4} = \frac{0,0064 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot (0,05 \text{ m})^2 / 4} = 3,26 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ortalama hızı da elde ettiğimiz için Reynolds sayısını hesaplayıp boru içindeki akış rejimini belirleyebiliriz.

$$Re = \frac{\rho \cdot V_{ort} \cdot D}{\mu} = \frac{\left( 999,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 3,26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) \cdot (0,05 \text{ m})}{\left( 0,001138 \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right)} = 143105$$

Elde edilen bu değer 4000'den büyük olduğu için akış türbülanslıdır. Türbülanslı akışta Darcy sürtünme faktörünü Haaland denklemi ile kolayca belirleyebiliriz ya da Moody diyagramından tespit edebiliriz. Boru malzemesi için bağıl pürüzlülük değeri  $\varepsilon/D=0,001$  olarak verilmiştir. Bu durumda  $f$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re} + \left( \frac{\varepsilon/D}{3,7} \right)^{1,11} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{143105} + \left( \frac{0,001}{3,7} \right)^{1,11} \right]$$

$$f = 0,0213$$

olarak bulunur. Bağlantı elemanlarının kayıp katsayılarını da tablolardan veya grafiklerden aşağıdaki gibi elde ederiz.

| Bağlantı Elemanı               | $K_K$        |
|--------------------------------|--------------|
| Keskin kenarlı boru girişi     | 0,50         |
| Glob vana, tam açık            | 10           |
| 90° düzgün dönüş (flanşlı)     | 0,30         |
| 90° düzgün dönüş (diş açılmış) | 0,90         |
| Sürgülü vana, yarı açık        | 2,10         |
| Keskin kenarlı boru çıkışı     | 1,08         |
| <b>TOPLAM:</b>                 | <b>14,88</b> |

Bilinmeyenleri bulduğumuza göre ana denkleme kaldığımız yerden devam edebiliriz.

$$h_{pompa,f} = (z_2 - z_1) + \left( f \cdot \frac{L}{D} + \sum K_K \right) \cdot \frac{V_{ort}^2}{2 \cdot g}$$

$$h_{pompa,f} = (30\text{m}) + \left( 0,0213 \cdot \frac{120\text{m}}{0,05\text{m}} + 14,88 \right) \cdot \frac{\left( 3,26 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2}{2 \cdot \left( 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}$$

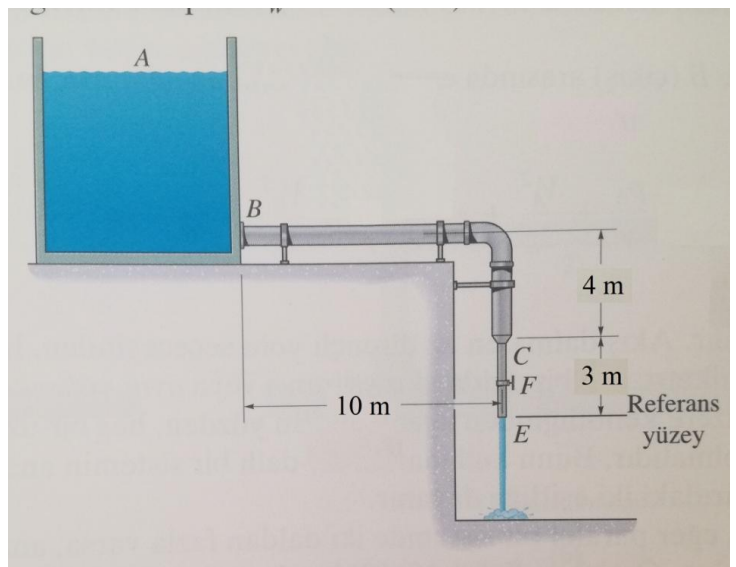
$$h_{pompa,f} = 30\text{m} + 35,75\text{m} = 65,75\text{ m}$$

$$h_{pompa,f} = \frac{\dot{W}_{pompa,f}}{\dot{m} \cdot g} \rightarrow \dot{W}_{pompa,f} = \rho \cdot g \cdot \dot{V} \cdot h_{pompa,f}$$

$$\dot{W}_{pompa,f} = \left( 999,1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot \left( 0,0064 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) \cdot (65,75\text{ m}) = 4124,3\text{ W} = 4,12\text{ kW}$$

### Örnek 9.5.

Şekildeki BC ve CE boruları plastikten imal edilmiştir ve çapları, sırasıyla, 6 cm ve 4 cm'dir. B noktasında keskin kenarlı giriş ( $K_K=0,5$ ), BC borusu üzerinde 90°'lik dirsek ( $K_K=0,6$ ), C noktasında yavaş daralma ( $K_K=0,15$ ) ve F noktasında tam açık sürgülü vana ( $K_K=0,2$ ) bulunmaktadır. E noktasındaki suyun debisi 17 L/s olarak ölçüldüğüne göre, suyun kinematik viskozitesini  $1,426 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  olarak A ile E noktaları arasındaki seviye farkını belirleyiniz (kinetik enerji düzeltme faktörünü 1,1 alınız).



### Çözüm 9.5.

Borulama sistemi seri bağlı olduğundan BC (1 nolu boru) ile CE (2 nolu boru) borularının hacimsel debileri eşit olmalıdır. Debiler bilindiği için, onu boru içi en-kesit alanlarına bölerek ortalama hızlara erişebiliriz.

$$V_1 = \frac{\dot{V}}{A_1} = \frac{0,017 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\left[ \frac{\pi \cdot (0,060 \text{ m})^2}{4} \right]} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_2 = \frac{\dot{V}}{A_2} = \frac{0,017 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\left[ \frac{\pi \cdot (0,040 \text{ m})^2}{4} \right]} = 13,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ortalama hızları da elde ettiğimiz için Reynolds sayılarını hesaplayıp boru içindeki akış rejimlerini belirleyebiliriz.

$$Re_1 = \frac{V_1 \cdot D_1}{\nu} = \frac{\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,060 \text{ m})}{\left(1,426 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)} = 25245$$

$$Re_2 = \frac{V_2 \cdot D_2}{\nu} = \frac{\left(13,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,040 \text{ m})}{\left(1,426 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right)} = 37868$$

Elde edilen bu değerlerin her ikisi de 4000'den büyük olduğu için akış iki boruda da türbülanslıdır. Türbülanslı akışta Darcy sürtünme faktörlerini Haaland denklemi ile kolayca belirleyebiliriz ya da Moody diyagramından tespit edebiliriz. Plastik için iç içi pürüzlülük değeri  $\varepsilon=0$ 'dır. Bu durumda  $f$  'ler,

$$\frac{1}{\sqrt{f_1}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re_1} \right]$$

$$f_1 = 0,0243$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_2}} = -1,8 \log \left[ \frac{6,9}{Re_2} \right]$$

$$f_2 = 0,0221$$

olarak bulunurlar. Borulama sistemi seri bağlı olduğundan toplam yük kaybı,

$$h_{K,Toplam} = h_{K,Sürekli 1} + h_{K,Yerel 1} + h_{K,Sürekli 2} + h_{K,Yerel 2}$$

$$h_{K,Toplam} = \left( f_1 \cdot \frac{L_1}{D_1} + \sum K_K \right) \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g} + \left( f_2 \cdot \frac{L_2}{D_2} + \sum K_K \right) \cdot \frac{V_2^2}{2 \cdot g}$$

$$h_{K,Toplam} = \left( 0,0243 \cdot \frac{14 \text{ m}}{0,060 \text{ m}} + \sum (0,5 + 0,6) \right) \cdot \frac{\left(6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} +$$

$$\left( 0,0221 \cdot \frac{3 \text{ m}}{0,040 \text{ m}} + \sum (0,15 + 0,2) \right) \cdot \frac{\left(13,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2 \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h_{K,Toplam} = 31,07 \text{ m}$$

olarak bulunurlar. A ve E noktaları arasında yer alan daimi akışa ait enerji denklemi yükler cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} + \alpha_A \cdot \frac{V_A^2}{2 \cdot g} + z_A + h_{pompa,f} = \frac{P_E}{\rho \cdot g} + \alpha_E \cdot \frac{V_E^2}{2 \cdot g} + z_E + h_{türbin,f} + h_{K,Toplam}$$

şeklinde ifade edilir. Soruyu dikkatli bir şekilde irdelediğimizde her iki noktanın da atmosfere açık olduğunu görürüz, bu da  $P_A = P_E = 0$  (etkin) olduğunu bizlere açıklar. A noktasındaki (geniş yüzey) akışkan parçacığının hızı da neredeyse 0'dır yani  $V_A \approx 0$  denilebilir. Sistem içerisinde pompa ve türbin de bulunmadığından  $h_{pompa,f} = h_{türbin,f} = 0$  diyebiliriz. Bu durumda nihai denklem aşağıdaki gibi olur.

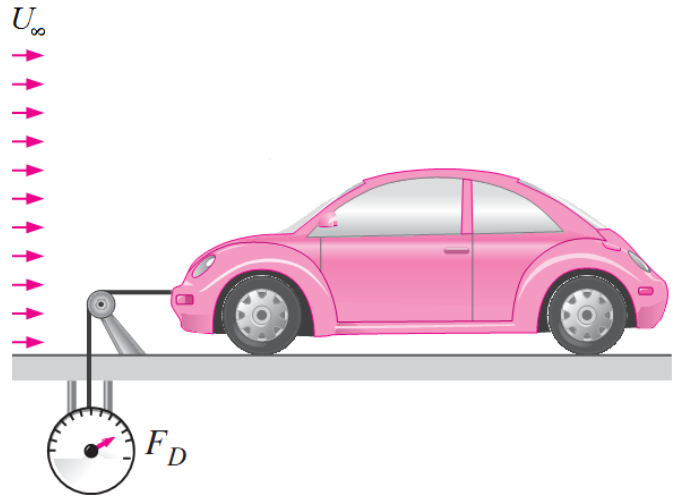
$$(z_A - z_E) = \alpha_E \cdot \frac{V_E^2}{2 \cdot g} + h_{K,Toplam}$$

Burada  $V_E$ 'nin  $V_2$ 'ye eşit olduğu açıkça görülebilir. Bu durumda seviye farkı,

$$(z_A - z_E) = 1,1 \cdot \frac{\left(13,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{19,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} + 31,07 \text{ m} = 41,3 \text{ m}$$

#### Örnek 10.1.

Bir arabanın direnç katsayısı büyük bir rüzgar tüneline 1 atm, 20°C ve 90 km/sa'lık tasarım şartları için belirlenecektir. Araba tam ölçeklidir. Arabanın yüksekliği, genişliği, tabanının yerden yüksekliği ve iki teker arası mesafesi, sırasıyla, 1,32 m, 1,76 m, 0,15 m ve 1,36 m'dir. Akışın cisim üzerine bıraktığı direnç 263 N olarak ölçüldüğüne göre aracın direnç katsayısını hesaplayınız.



#### Çözüm 10.1.

Gerçek direnç katsayısına iyi bir şekilde yaklaşabilmek için kuvvet ölçümünün, aşağıda sıralanan şartlar sağlandıktan sonra gerçekleştirilmesi gerekmektedir.

- 1- Hava akışı daimi ve sıkıştırılamazdır.
- 2- Gerçek sürüş şartlarını sağlamak için araç altındaki zemin rüzgar hızı ile aynı hızda hareket ettirilmelidir.
- 3- Aracın tekerleri de zeminle birlikte dönmelidir.

Verilen sıcaklık ve basınçta havanın yoğunluğu  $\rho = 1,204 \text{ kg/m}^3$ 'tür. Rüzgar hızı 90 km/sa yani 25 m/s'dir. Ön görünüş alanı ise

$$A_F = 1,32\text{m} \times 1,76\text{m} - 0,15\text{m} \times 1,36\text{m} = 2,12\text{ m}^2$$

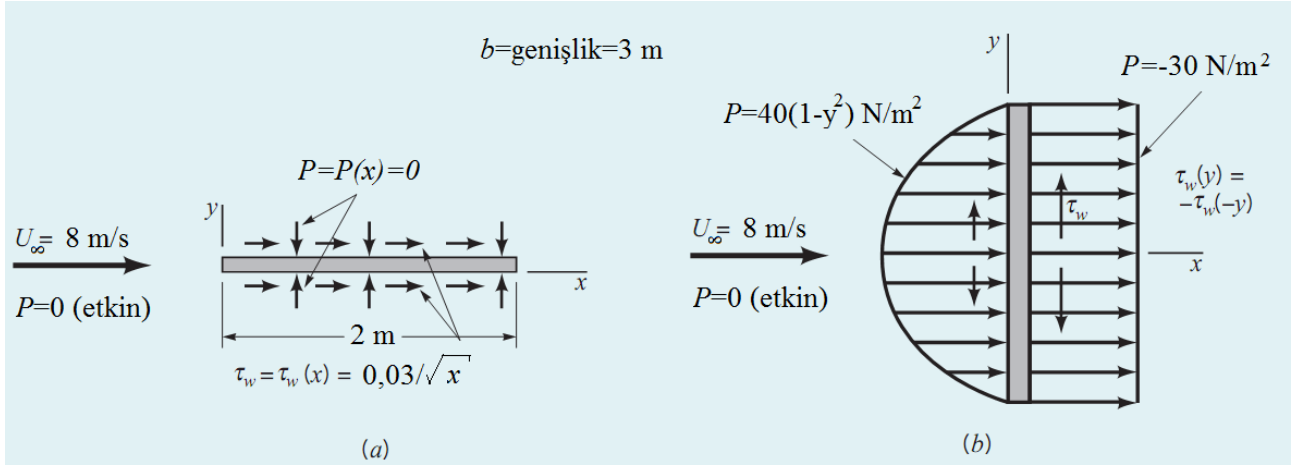
olarak hesaplanır. Bu durumda direnç katsayısı,

$$C_D = \frac{F_D}{0,5 \cdot \rho \cdot U_\infty^2 \cdot A_F} = \frac{263\text{ N}}{0,5 \cdot (1,204\text{ m}) \cdot \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (2,12\text{ m}^2)} \cong 0,33$$

olarak elde edilir. Unutulmamalıdır ki direnç katsayısı tasarım şartlarına bağlıdır ve farklı hızlar için farklı değerler alabilir. Bu nedenle farklı taşıtlar için bildirilen direnç katsayıları ancak benzer şartlar altında belirlenmiş ise (standart testlere tabi tutulmuşlarsa) anlamlı bir şekilde karşılaştırılabilir.

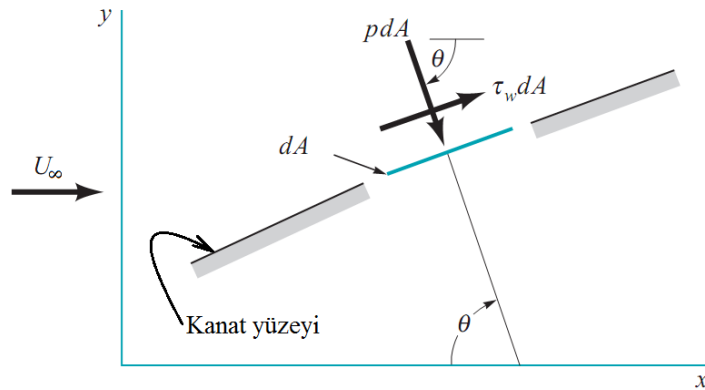
### Örnek 10.2.

Standart şartlardaki hava düz bir plaka üzerinden aşağıda gösterildiği gibi akmaktadır. Plaka ilk şekilde akışa paralel, ikinci şekilde ise akışa dik yerleştirilmiştir. Bu yerleştirme durumları için plakaya etkiyen yüzey kayma gerilmesi ve basınç dağılımları şekil üzerinde belirtildiği gibi olmaktadır. Her iki durum için plakaya etkiyen direnç ve kaldırma kuvvetlerini tayin ediniz.



### Çözüm 10.2.

Soruyu çözmeye geçmeden önce soru içerisinde kullanılan denklemlerin aşağıdaki referans düzlem ve kuvvetlerden çıkarıldığı hatırlanmalıdır.



a) Akışa paralel yerleştirme durumu için direnç ve kaldırma aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$F_D = F_{D,\text{üst}} + F_{D,\text{alt}}$$

$$F_{D,\text{üst}} = \int_{\text{üst}} P \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 90^\circ=0} \cdot dA + \int_{\text{üst}} \tau_w \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 90^\circ=1} \cdot dA$$

$$F_{D,\text{üst}} = \int_{\text{üst}} \tau_w \cdot dA = \int_{\text{üst}} (0,03/\sqrt{x}) \cdot \underbrace{b}_{3\text{ m}} \cdot dx = 0,18x^{0,5}|_0^2 = 0,255 \text{ N}$$

$$F_{D,\text{alt}} = \int_{\text{alt}} P \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 270^\circ=0} \cdot dA + \int_{\text{alt}} \tau_w \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 270^\circ+180^\circ=1} \cdot dA$$

$$F_{D,\text{alt}} = \int_{\text{alt}} \tau_w \cdot dA = \int_{\text{alt}} (0,03/\sqrt{x}) \cdot \underbrace{b}_{3\text{ m}} \cdot dx = (0,18x^{0,5})|_0^2 = 0,255 \text{ N}$$

ise

$$F_D = F_{D,\text{üst}} + F_{D,\text{alt}} = 0,255 \text{ N} + 0,255 \text{ N} = 0,51 \text{ N}$$

Diğer yandan,

$$F_L = F_{L,\text{üst}} + F_{L,\text{alt}}$$

$$F_{L,\text{üst}} = - \int_{\text{üst}} \underbrace{P}_{P=0(\text{etkin})} \cdot \sin \theta \cdot dA + \int_{\text{üst}} \tau_w \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 90^\circ=0} \cdot dA = 0$$

$$F_{L,\text{alt}} = - \int_{\text{alt}} \underbrace{P}_{P=0(\text{etkin})} \cdot \sin \theta \cdot dA + \int_{\text{alt}} \tau_w \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 90^\circ+180^\circ=0} \cdot dA = 0$$

ise

$$F_L = F_{L,\text{üst}} + F_{L,\text{alt}} = 0 \text{ N}$$

b) Akışa dik yerleştirme durumu için direnç ve kaldırma aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$F_D = F_{D,\text{ön}} + F_{D,\text{arka}}$$

$$F_{D,\text{ön}} = \int_{\text{üst}} P \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 0^\circ=1} \cdot dA + \int_{\text{üst}} \tau_w \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 0^\circ=0, \sin 0+180^\circ=0} \cdot dA$$

$$F_{D,\text{ön}} = \int_{\text{üst}} P \cdot dA = \int_{\text{üst}} [40 \cdot (1 - y^2)] \cdot \underbrace{b}_{3\text{ m}} \cdot dy = (120y - 40y^3)|_{-1}^1 = 160 \text{ N}$$

$$F_{D,\text{arka}} = \int_{\text{arka}} P \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 180^\circ=-1} \cdot dA + \int_{\text{arka}} \tau_w \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 180^\circ=0, \sin 180+180^\circ=0} \cdot dA$$

$$F_{D,\text{arka}} = \int_{\text{arka}} -P \cdot dA = \int_{\text{arka}} -(-30) \cdot b \cdot dy = 90y|_{-1}^1 = 180 \text{ N}$$

ise

$$F_D = F_{D,\text{ön}} + F_{D,\text{arka}} = 160 \text{ N} + 180 \text{ N} = 340 \text{ N}$$

Diğer yandan,

$$F_L = F_{L,\text{ön}} + F_{L,\text{arka}}$$

ve sırasıyla

$$F_{L,\text{ön}} = F_{L,\text{yukarı}} + F_{L,\text{aşağı}}$$

$$F_{L,arka} = F_{L,yukarı} + F_{L,aşağı}$$

olur.  $F_{L,ön}$  'den başlayalım.

$$F_{L,ön} = F_{L,yukarı} + F_{L,aşağı}$$

$$F_{L,yukarı} = - \int_{yukarı} P \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 0^\circ=0} \cdot dA + \int_{yukarı} \tau_w \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 0^\circ=1} \cdot dA = \int_0^1 \tau_w \cdot dA$$

$$F_{L,aşağı} = - \int_{aşağı} P \cdot \underbrace{\sin \theta}_{\sin 0^\circ=0} \cdot dA + \int_{aşağı} \tau_w \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\cos 0+180^\circ=-1} \cdot dA = - \int_{-1}^0 \tau_w \cdot dA$$

ise

$$F_{L,ön} = F_{L,yukarı} + F_{L,aşağı} = \int_0^1 \tau_w \cdot dA - \int_{-1}^0 \tau_w \cdot dA = 0$$

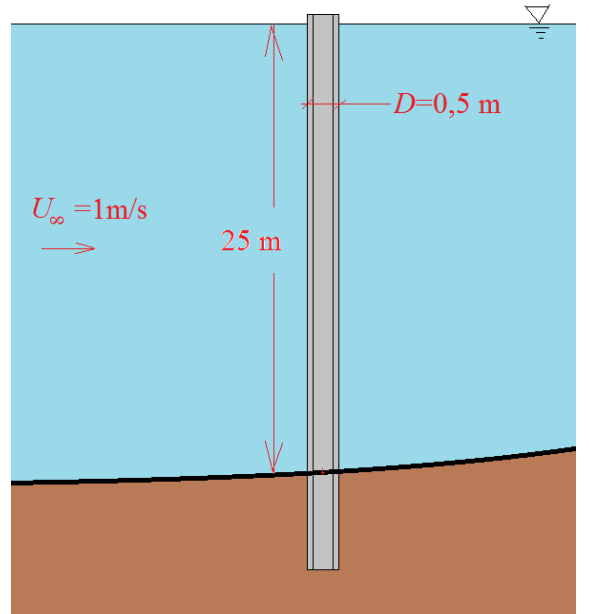
bulunur. Aynı sonuç  $F_{L,arka}$  için de geçerlidir. Bu durumda

$$F_L = F_{L,ön} + F_{L,arka} = 0$$

olarak elde edilir. Bu sonuç beklendik bir sonuçtur çünkü cisim kaldırma kuvveti doğrultusuna dik ve cisim geometrik merkezinden geçen düzleme göre simetriktir.

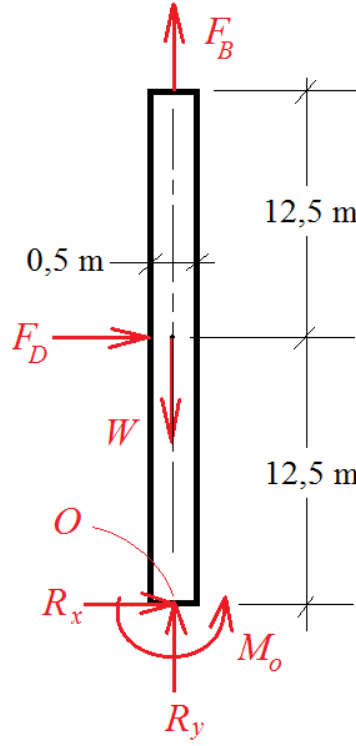
### Örnek 10.3.

Kıyıdan uzağa dikilmesi planlanan bir rüzgar türbininin kulesinin sadece su altında kalan kısmı bitirilebilmiştir. Su altında kalan kısım bir silindire benzemektedir ve toplam kütlesi 9 tondur. Çapı 0,5 m ve çok küçük bir kısmı su yüzeyinde olan bu silindirik kule serbest yüzeyden 25 m derinliğe kadar uzanmakta daha sonra da deniz tabanına saplanmaktadır. Denizin bu bölgesinde 1 m/s hızında sabit ve üniform hızlı akıntı bulunmaktadır. Deniz suyunun yoğunluğunu  $1027 \text{ kg/m}^3$  ve viskozitesini  $1,48 \times 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  olarak kuleyi ayakta tutmak için gerekli bileşke kuvvetin şiddeti ve doğrultusu ile momenti belirleyiniz.



### Çözüm 10.3.

Kulenin serbest cisim diyagramını çizelim, diyagramda hesaplanabilen kuvvet ya da momentleri hesaplayalım, hesaplayamadıklarımızı da denge denklemlerini uygulayarak tespit edelim.



$$W = m \cdot g = (9000 \text{ kg}) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 88290 \text{ N}$$

$$F_B = \rho_{su} \cdot g \cdot \forall_{batan} = \left(1027 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) \cdot \left(\pi \cdot \frac{(0,5 \text{ m})^2}{4} \cdot 25 \text{ m}\right) = 49455 \text{ N}$$

$$F_D = C_D \cdot 0,5 \cdot \rho_{su} \cdot U_{\infty}^2 \cdot A_F$$

şeklinde ifade edilir. Burada hem  $F_D$  hem de  $C_D$  bilinmemektedir.  $C_D$ 'yi Reynolds sayısından tespit edebiliriz.

$$Re = \frac{\rho_{su} \cdot U_{\infty} \cdot D}{\mu} = \frac{\left(1027 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,5 \text{ m})}{(1,48 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s})} = 346959$$

olarak bulunur. Bu değer silindir için laminar akış ayrılmasından türbülanslı akış ayrılmasına geçiş değeri olan  $2 \times 10^5$ 'ten büyük olduğu için  $C_D=0,3$  alınacaktır. Bu durumda direnç kuvveti,

$$F_D = (0,3) \cdot 0,5 \cdot \left(1027 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (0,5 \text{ m} \times 25 \text{ m}) = 1926 \text{ N}$$

Şimdi iki-boyutta denge denklemlerini uygulayarak kulenin tabanına etkiyen önce bileşke kuvvetin şiddetini ve doğrultusunu sonra da momentini belirleyelim.

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_D + R_x = 0$$

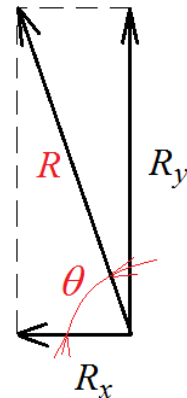
$$R_x = -F_D = -1926 \text{ N} = 1926 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_B + R_y - W = 0$$

$$R_y = W - F_B = 38835 \text{ N}$$

Bu kuvvetlerden yola çıkarak bileşke kuvvetin şiddeti ( $R$ ) ve doğrultusu ( $\theta$ ) aşağıdaki gibi hesaplanabilir.



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(1926 \text{ N})^2 + (38835 \text{ N})^2} = 38883 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 87.2^\circ$$

Gerekli moment ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

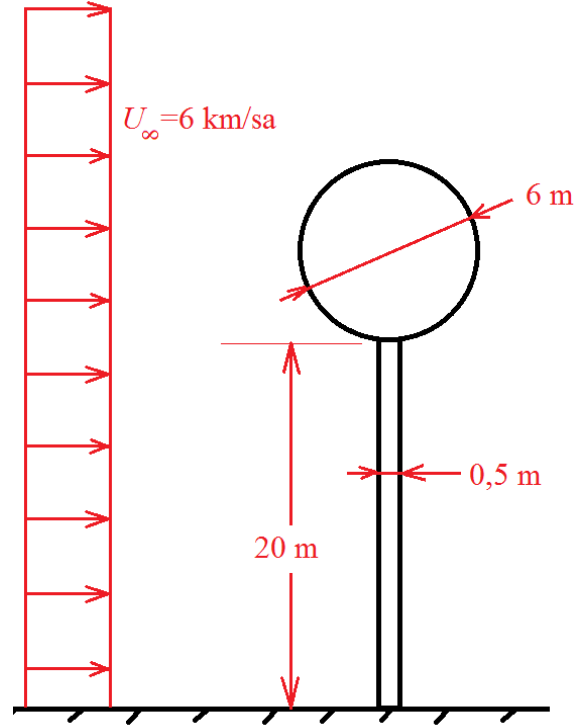
$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0$$

$$M_O - (F_D) \cdot (12,5 \text{ m}) = 0$$

$$M_O = 24075 \text{ N} \cdot \text{m}$$

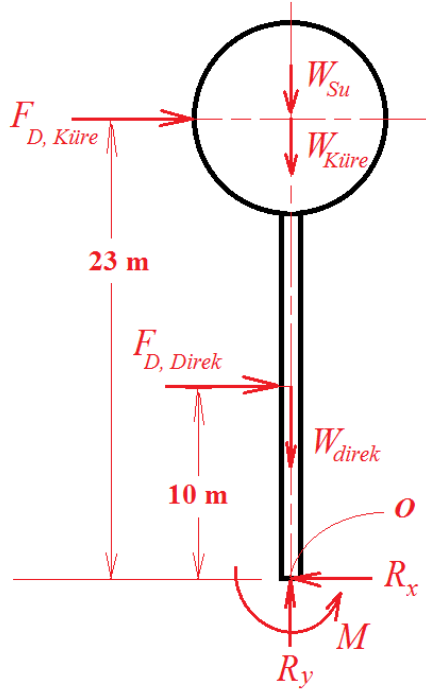
#### Örnek 10.4.

Bir mahalleye su temin edecek olan su kulesinin boyutları şekilde verildiği gibidir. Suyu içerisinde muhafaza eden ve %70'i dolu olan deponun şekli bir küreye benzemektedir ve bu küreyi tutan direk ise dairesel en-kesit alanına sahiptir. Su kulesinin dikileceği alan düzdür ve yakınında başka bir yapı bulunmamaktadır. Meteorolojiden elde edilen bilgilere göre bu civardaki maksimum rüzgar hızı 6 km/sa'dır. Güvenlik katsayısını 1,5 alarak, bu yapının devrilmemesi için gerekli momenti belirleyiniz ( $\rho_{hava}=1,204 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_{hava}=1,825 \times 10^{-5} \text{ kg/m/s}$ ). Kürenin direnç katsayısını  $Re < 2,5 \times 10^5$  için 0,42,  $Re > 2,5 \times 10^5$  için 0,2 alınız.



#### Çözüm 10.4.

Sistemin serbest cisim diyagramını çizelim ve moment dengesinden gerekli momenti tespit etmeye çalışalım.



$$+\circlearrowleft \sum M_O = 0$$

$$M_O - (F_{D,Küre}) \cdot (23 \text{ m}) - (F_{D,Direk}) \cdot (10 \text{ m}) = 0$$

Bu denklemdeki momenti bulabilmek için depoya ve direğe etkiyen kuvvetleri bulmamız gerekmektedir. Kuvvetleri bulabilmemiz için de kuvvet katsayılarını belirlememiz gerekmektedir. Kuvvet katsayılarını  $Re$ 'ye bağlı olarak bulabiliriz. Küre (depo) için,

$$Re = \frac{\rho_{hava} \cdot U_{\infty} \cdot D_{Küre}}{\mu} = \frac{\left(1,204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (6 \text{ m})}{\left(1,825 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)} = 661045$$

bulduğundan  $C_D=0,2$  olarak alınır. Silindir (direk) için,

$$Re = \frac{\rho_{hava} \cdot U_{\infty} \cdot D_{Direk}}{\mu} = \frac{\left(1,204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \cdot (0,5 \text{ m})}{\left(1,825 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}\right)} = 55087$$

bulduğundan  $C_D=1,2$  olarak alınır. Bu durumda depo ve direğe etkiyen kuvvetler sırasıyla,

$$F_D = C_D \cdot 0,5 \cdot \rho_{hava} \cdot U_{\infty}^2 \cdot A_F$$

$$F_{D,Küre} = (0,2) \cdot 0,5 \cdot \left(1,204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{(6 \text{ m})^2}{4}\right) = 9,5 \text{ N}$$

$$F_{D,Direk} = (1,2) \cdot 0,5 \cdot \left(1,204 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(1,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (0,5 \text{ m} \times 20 \text{ m}) = 20,1 \text{ N}$$

bulunur. Bu durumda moment,

$$M_O - (F_{D,Küre}) \cdot (23 \text{ m}) - (F_{D,Direk}) \cdot (10 \text{ m}) = 0$$

$$M_O = (9,5 \text{ N}) \cdot (23 \text{ m}) - (20,1 \text{ N}) \cdot (10 \text{ m}) = 419,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

olarak bulunur. Güvenlik katsayısını 1,5 aldığımızda gerekli moment

$$M_{O,Güvenli} = 1,5 \cdot (419,5 \text{ N} \cdot \text{m}) = 629,3 \text{ N} \cdot \text{m} \text{ olarak bulunur.}$$

### Örnek 10.5.

Boeing 737-800 tipi bir uçağın boş kütlesi 41413 kg'dır. Bu uçağın maksimum yolcu taşıma kapasitesi iki pilot ve dört kabin mürettebatı ile birlikte 191'dir. Her yolcu için maksimum bagaj kapasitesi 15 kg'dır. Uçağın kanatlarının ön görünüş alanı  $20 \text{ m}^2$ , üst görünüş alanı ise  $125 \text{ m}^2$ 'dir. Uçağın seyir hızı 700 km/sa, seyir irtifası 12 km ve bu irtifadaki hava yoğunluğu  $0,312 \text{ kg/m}^3$ 'tür. Uçağın kalkış ve inişte kullandığı iki parçalı flaplar kanat içerisinden çıkmaktadır. Bu uçağın NACA 23012 tipi kanat kullandığını, iniş ve kalkış esnasındaki hava yoğunluğunun ortalama  $0,9 \text{ kg/m}^3$  olduğunu varsayarak,

- Bu uçağın emniyetli bir kalkış veya iniş yapabilmesi için flapların aktif olduğu ve olmadığı durumlarda erişilebilecek en düşük hızları belirleyiniz.
- Seyir irtifasında daimi seyri sağlayacak hücum açısını belirleyiniz.
- Uçak seyir irtifasında seyrederken, sadece uçak kanatlarından kaynaklanan direnci yenmek için gereken motor gücünü belirleyiniz.

### Çözüm 10.5.

- a) Önce uçuşa hazır hale gelen uçağın toplam kütlesini ( $m_T$ ) belirleyelim.

Uçağın toplam kütlesi =  $m_T$  = Uçağın boş kütlesi + Toplam yolcu kütlesi + Toplam bagaj kütlesi

$$m_T = 41413 \text{ kg} + 80 \text{ kg} \times 191 + 15 \text{ kg} \times 191$$

$$m_T = 59558 \text{ kg} \text{ ise toplam ağırlığı } (W_T)$$

$$W_T = 59558 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 584,26 \text{ kN}$$

Bu durumda, sırasıyla, flapların aktif olup olmadığı durumlar için minimum hızlar

$$V_{min,aktif} = \sqrt{\frac{W_T}{0,5 \cdot \rho \cdot C_{L,maks} \cdot A_P}} = \sqrt{\frac{584,26 \times 10^3 \text{ N}}{0,5 \cdot \left(0,9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot (3,48) \cdot (125 \text{ m}^2)}} = 54,63 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

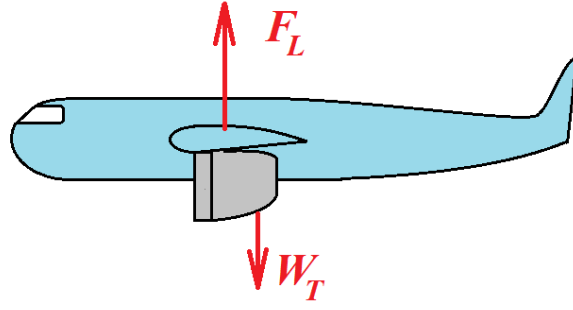
$$V_{min,pasif} = \sqrt{\frac{W_T}{0,5 \cdot \rho \cdot C_{L,maks} \cdot A_P}} = \sqrt{\frac{584,26 \times 10^3 \text{ N}}{0,5 \cdot \left(0,9 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot (1,52) \cdot (125 \text{ m}^2)}} = 82,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

olarak elde edilirler. Stol bölgesinden kaçınarak güvenli bir iniş/kalkış sağlayabilmek adına güvenli uçuş hızları, sırasıyla, flapların aktif olup olmadığı durumlar için,

$$V_{min,emniyetli,aktif} = V_{min,aktif} \times 1,2 = 65,56 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_{min,emniyetli,pasif} = V_{min,pasif} \times 1,2 = 99,19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- b) Uçak kalkış ve iniş arasındaki zamanda sabit irtifada, sabit hızla, daimi seyir halinde iken uçağa akışa dik yönde etkiyen kuvvet dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir.



$$+\uparrow \sum F_y = 0$$

$$F_L - W_T = 0$$

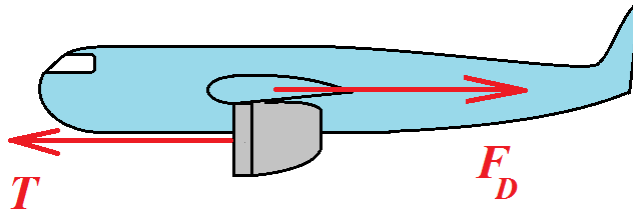
$$F_L = W_T = 584,26 \times 10^3 \text{ N}$$

Seyir esnasında flaplar da minimum direnç oluşturmak adına pasif hale geçerler. Bu durum için kaldırma katsayısı

$$C_L = \frac{F_L}{0,5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A_p} = \frac{584,26 \times 10^3 \text{ N}}{0,5 \cdot \left(0,312 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(194,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (125 \text{ m}^2)} = 0,79$$

olarak bulunur. Bu kaldırma katsayısını oluşturmak için gereken hücum açısı yaklaşık olarak  $\alpha=7^\circ$ 'ye denk düşmektedir. Bu kaldırma katsayısına denk düşen direnç katsayısı ise  $C_D=0,015$  olmaktadır.

c) Uçak kalkış ve iniş arasındaki zamanda sabit irtifada, sabit hızla, daimi seyir halinde iken uçağa akış yönünde etkiyen kuvvet dengesi aşağıdaki gibi yazılabilir.



$$+\rightarrow \sum F_x = 0$$

$$F_D - T = 0 \quad (T, \text{kanatlardan gelen direnç kadar uçak motorlarının ürettiği itkidir})$$

$$T = F_D = C_D \cdot 0,5 \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A_F = (0,015) \cdot 0,5 \cdot \left(0,312 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(194,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot (20 \text{ m}^2)$$

$$T = 1768,6 \text{ N}$$

ise gerekli güç

$$P = T \times V = (1768,6 \text{ N}) \cdot \left(194,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) = 343,8 \text{ kW}$$

olarak bulunur.